Problemas de Algebra Matricial

1 Matrices

Sugerencias GeoGebra

- Entrar cada matriz en la vista Hoja de Cálculo, HC, seleccionarla y presionar luego el botón Matriz.
- Operar con las matrices en la vista Cálculo Simbólico, CAS. Recordar que para las asignaciones se debe usar :=
- Usar los comandos Transpose, MatrixRank y Determinant cuando corresponda.

1 Definición y operaciones

1. Explicitar las siguientes matrices.

   $a)$ m=3, n=4 $\quad a_{ij} = i + j \quad 1 \le i \le 3\,, 1 \le j \le 4$

   b) m=3, n=3 $\quad a_{ij} = 1$ si i=j, $\quad a_{ij} = 0$ si $i \ne j$, $1 \le i \le 3\,, 1 \le j \le 3$

   $c)$ m=4, n=2 $\quad a_{ij} = (-1)^{i+j}, \quad 1 \le i \le 4\,, 1 \le j \le 2$

   $d)$ m=4, n=4 $\quad a_{ij} = i \cdot j \quad 1 \le i \le 4\,, 1 \le j \le 4$

2. Crear matrices de tal forma que cumplan las siguientes consignas.

   $a)$ $A_1 = \left\{ A \in \mathbb{R}^{3x3} \;/\; a_{ij} = a_{ji},\ \text{si } i \ne j \right\}$ (matrices simétricas)

   b) $A_2 = \left\{ A \in \mathbb{R}^{3x3} \;/\; a_{ij} = -a_{ji},\ \text{si } i \ne j \right\}$ (matrices antisimétricas)

   c) $A_3 = \left\{ A \in \mathbb{R}^{4x4} \;/\; a_{ij} = 0 \text{ si } i > j \right\}$ (matrices triangulares superiores)

   d) $A_4 = \left\{ A \in \mathbb{R}^{4x4} \;/\; a_{ij} = 0 \text{ si } i < j \right\}$ (matrices triangulares inferiores)

   e) $A_5 = \left\{ A \in \mathbb{R}^{4x4} \;/\; a_{ij} = 0 \text{ si } i \ne j \right\}$ (matrices diagonales)

   f) $A_6 = \left\{ A \in \mathbb{R}^{4x4} \;/\; a_{ij} = 0 \text{ si } i \ne j, a_{ij} = k \text{ si } i=j \right\}$ (matrices escalares)

3. Dadas las matrices:

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

   Hallar 3A–2B+5C

R:

$$3A - 2B + 5C = \begin{pmatrix} 8 & 28 \\ 18 & 41 \\ 37 & 45 \end{pmatrix}$$

4. Hallar DA, D^2, A^3

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

R: D^2 no se puede pues no es cuadrada.

$$D\cdot A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 & 10 \\ -2 & -1 & 6 & 3 \\ 1 & -1 & 9 & 8 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 & -10 \\ 3 & 3 & -13 & -6 \\ 7 & 9 & -13 & 6 \\ 3 & 2 & -13 & -7 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} -22 & -29 & 34 & -27 \\ -10 & -19 & -10 & -45 \\ 18 & 15 & -70 & -31 \\ -13 & -22 & -5 & -47 \end{pmatrix}$$

5. Dadas las siguientes matrices probar que la propiedad cancelativa del producto no se cumple, pues $AB = AC$, pero….

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esto sucede pues la matriz A no tiene inversa (su determinante es cero).

6. Con las matrices A, B y D demostrar la propiedad distributiva del producto respecto de la suma.

$$D := \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

R:

$$D(A+B) = DA + DB$$

$$D\cdot A + D\cdot B = \begin{pmatrix} 12 & -6 & -8 & 16 \\ -4 & -3 & 9 & 7 \\ 2 & -6 & 5 & 15 \end{pmatrix}$$

7. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 \end{pmatrix}$$

Hallar la matriz D de modo tal que:

a) A+2B–D=0 (0 matriz nula)

b) 2A+B+D=U (U= matriz con todos 1 del orden que crea conveniente)

R:

$$A + 2B = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ -1 & 10 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad I - 2A - B = \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ -3 & -10 \\ -8 & -10 \end{pmatrix}$$

2 Determinantes

1 Cálculo de determinantes

8. Calcular los rangos de las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

R: GeoGebra
Rg(A)=2, Rg(B)=4

9. Calcular los siguientes determinantes por 3 métodos distintos.

$$i)\ |A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad iii)\ |C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$ii)\ |B| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad iv)\ |D| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

R: GeoGebra
$|A| = 4$, $|B| = -5$, $|C| = -135$, $|D| = 57$

2 Problemas verbales (matrices)

10. Los precios de un hotel son los siguientes: habitación single: \$75, doble: \$120, triple: \$150.
a) Construya una matriz A de los precios del hotel.
b) Si el desayuno cuesta \$8 por persona, construya una matriz B de los precios con desayuno.
c) Si en temporada alta los precios se incrementan un 20%, construya dos matrices C y D de los nuevos precios con y sin desayuno.
d) ¿Es cierto que C = 1,2A y D =1,2B? ¿Por qué?
R: a) A (75 120 150), b) B (83 136 174), c) C (90 144 180), D (99,6 163,2 208).

11. Un comerciante de televisores usados tiene 5 televisores de 26”, ocho de 20”, cuatro de 18” y diez de 12”. Los televisores de 26” se venden a 450\$ cada uno, los de 20” en 350\$, los de 18” en 300\$ y los de 12” en 150\$. Exprese el precio de venta total de su existencia de televisores como el producto de dos matrices.
R: 7750\$

12. Un turista regresó de Europa con la siguientes monedas extranjeras: 10 euros, 20 libras, 12 coronas dinamarquesas y 35 francos suizos. El equivalente de estas monedas en pesos es: un euro vale 5.42, una libra vale 6.31, una corona vale 0.73 y 1 franco suizo vale 3.54. Calcular el valor total en pesos.
R: \$313.06

13. Un fabricante que elabora dos artículos, sillas y escritorios, desea fabricar 12 sillas y 20 escritorios. La fabricación de sillas requiere, por unidad, 12 unidades de madera, 0.5 botella de

barniz y 6 horas/hombre. Los escritorios requieren, también por unidad, 25 unidades de madera, 2 botellas de barniz y 20 horas/hombre. Los costos de tales requerimientos son: madera $6 por unidad; barniz: $18 por unidad y 1 hora/hombre $15 por unidad. Aplicar el cálculo matricial para obtener el costo de elaboración de 12 sillas y 20 escritorios.
R: $11772

14. Un kiosco vende 1500 gaseosas, 700 jugos y 1400 dulces por semana. Los precios de venta unitarios son $1.65; $0.80 y $2.50 respectivamente. A su vez, los costos unitarios son $1.1; $0.50 y $1.80. Obtener ingreso, costo y beneficio total.
R: I_{total}= $6535 C_{total}= $4520 B_{total}= $2015

15. Un fabricante produce tres tipos de clavos: de aluminio (A), de cobre (Q) y de acero (H). Todos ellos se fabrican en longitudes de 1; 1,5 y 2 cm con los precios respectivos siguientes:
Clavos A: 0,20 0,30 0,40 $
Clavos Q: 0,30 0,45 0,60 $
Clavos H: 0,40 0,60 0,80 $
Sabiendo que en un minuto se producen:
De 1 cm de longitud: 100A 50Q 700H
De 1,5 cm de longitud: 200A 20Q 600H
De 2 cm de longitud: 500A 30Q 400H
a) Resumir la información anterior en dos matrices: M y N. M que recoja la producción por minuto, y N que recoja los precios.
b) Calcular el elemento a_{11} de la matriz M *N y dar su significado.
c) Calcular el elemento a_{11} de la matriz N*M y dar su significado.
R: b) 280 $ de clavos de aluminio por minuto. c) 315 $ de clavos de 1cm por minuto.

A1 Sistemas de ecuaciones lineales

Sugerencias GeoGebra

- Usar los comandos Invert, Soluciones, EscalonadaReducida según se necesite.

1 Matriz Inversa

16. Calcular, si existen, las matrices inversas de las dadas por 3 métodos distintos.

$$a)\ A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 6 & 3\end{bmatrix} \qquad b)\ B=\begin{bmatrix}2 & -3 & -4\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & -5 & -6\end{bmatrix}$$

$$c)\ C=\begin{bmatrix}2 & 3 & 5\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix} \qquad d)\ D=\begin{bmatrix}0 & -1 & -3 & 1\\ 8 & -5 & 0 & -3\\ -6 & -4 & 1 & 2\\ 1 & -9 & -2 & 0\end{bmatrix}$$

$$e)\ E=\begin{bmatrix}1 & 7 & 3 & 2\\ 0 & 2 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{bmatrix} \qquad f)\ F=\begin{bmatrix}-4 & 0 & 0 & 0\\ 9 & -3 & 0 & 0\\ 4 & 6 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 5 & 1\end{bmatrix}$$

R: GeoGebra

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-0.2 & 0.133\\ 0.6 & -0.067\end{pmatrix},\ B^{-1}=\begin{pmatrix}0.556 & -0.111 & -0.333\\ -0.333 & 0.667 & 0\\ 0.278 & -0.556 & -0.167\end{pmatrix},\ C^{-1}=\begin{pmatrix}-0.111 & 0.556 & 0.333\\ 0.222 & -1.111 & 0.333\\ 0.111 & 0.444 & -0.333\end{pmatrix},$$

$$D^{-1}=\begin{pmatrix}0.986 & 0.931 & 0.903 & -1.028\\ -0.014 & -0.069 & -0.097 & -0.028\\ 0.556 & 0.778 & 0.889 & -0.889\\ 2.653 & 2.264 & 2.569 & -2.694\end{pmatrix},\ E^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -3.5 & -3.333 & 6.208\\ 0 & 0.5 & 0.333 & -0.708\\ 0 & 0 & 0.333 & -0.583\\ 0 & 0 & 0 & 0.25\end{pmatrix},$$

$$F^{-1}=\begin{pmatrix}-0.25 & 0 & 0 & 0\\ -0.75 & -0.333 & 0 & 0\\ -2.75 & -1 & -0.5 & 0\\ 15.5 & 5.667 & 2.5 & 1\end{pmatrix},$$

2 Sistemas de ecuaciones

17. Resolver los siguientes sistemas por cuatro métodos distintos.

$$a)\begin{cases}x - 2y + z = 7\\ 3x + y + z = 8\\ x - y + 4z = 15\end{cases} \qquad b)\begin{cases}2x + y + z = 4\\ 3x + y + z = 8\\ \quad y + 7z = 8\end{cases} \qquad c)\begin{cases}x - 2y = -3\\ -2x + 3y + z = 4\\ 2x + y - z = 4\end{cases}$$

R: GeoGebra
a) (x, y z) = (2, -1, 3), b) (4, –6, 2), c) (1, 2, 0)

18. Resolver los siguientes sistemas por cuatro métodos distintos.

$$a)\ \begin{cases} 3x - y + 2z = 12 \\ -x - y - 2z = -4 \\ x + 2y = -2 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} -x - 2y + 3z = 20 \\ 2x + 3y - 5z = -31 \\ 8x - 4y - 7z = -1 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} 4x - y + z = 4 \\ x - y + 4z = 1 \\ 2x + y - 7z = 3 \end{cases} \qquad d)\ \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - 2y - z = 3 \\ 4x - 5y - z = 9 \end{cases}$$

R;
a) (x, y, z) = (2,-2, 2), b) (5,-2, 7), c) Rg(A)=2, Rg(A_0)=3 Incompatible
d) Rg(A)=2, Rg(A_0)=2 Compatible Indeterminado.

19. Crear un determinante de 3° orden cero por CL entre las filas y obtener la CL que existe entre las columnas. Idem creando el determinante nulo por CL entre las columnas y obtener la CL que existe entre las filas.

20. ¿Un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas puede ser incompatible? Razonar la respuesta.
Sí, si $R < R_0$

Analizar para que valores de las constantes de cada uno de los siguientes sistemas, es compatible determinado (SCD), compatible indeterminado (SCI) o incompatible (SI). Para los casos SCI y SCD, hallar el resultado del sistema.
Con GeoGebra comprobar algunos de los resultados numéricos.

21. $\begin{cases} -2kx + (k-1)y + 2 = 0 \\ (k+2)x + (2k+1)y + 2 = 0 \end{cases}$

R: $\begin{cases} SCI : \nexists k, \\ SI : k = -1 \wedge k = \dfrac{2}{5} \\ SCD : k \neq -1 \wedge k \neq \dfrac{2}{5} \end{cases}$

22. $\begin{cases} px + qy = p \\ qx + py = q \end{cases}$

R: $\begin{cases} SCI : |p| = |q|, \\ SI : \nexists \text{ situación} \\ SCD : |p| \neq |q| \Rightarrow x = 1, y = 0 \end{cases}$

23. $\begin{cases} |k-1|\,x + ky = |k-1| \\ kx + |k-1|\,y = k \end{cases}$

R: $\begin{cases} SCI: k = \dfrac{1}{2}, \\ SI: \nexists k \\ SCD: k \neq \dfrac{1}{2} \end{cases}$

24. $\begin{cases} \dfrac{k-1}{k+3}x + 2^0 y = k \\ kx = \dfrac{k-1}{k+3} - y \end{cases}$

R: $\begin{cases} SCI: k = -1 \vee k = -3, \\ SI: \nexists k \\ SCD: k \neq -1 \wedge k \neq -3 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 3^{|2k+1|}x = 3^{|k-2|} - y \\ 3^{|k-2|}x + y\ln e = 3^{|2k+1|} \end{cases}$

R: $\begin{cases} SCI: k = \dfrac{1}{3} \vee k = -3, \\ SI: \nexists k \\ SCD: k \neq \dfrac{1}{3} \wedge k \neq -3 \end{cases}$

26. $\begin{cases} x\log_2|k+2| + y = \log_2|2k-1| \\ x\log_2|2k-1| = y\log_2 2^{-1} + \log_2|2k-1| \end{cases}$

R: $\begin{cases} SCI: k = \dfrac{1}{3} \wedge k = 3, \\ SI: \nexists k \\ SCD: k \neq \dfrac{1}{3} \wedge k \neq 3 \end{cases}$

27. $\begin{cases} senk.x + \cos k.y = senk \\ \cos k.x + senk.y = senk \end{cases}$

R: $\begin{cases} SCI: k \neq \dfrac{\pi}{4} \wedge k \neq \dfrac{5\pi}{4}, \\ SI: k = \dfrac{3\pi}{4} \vee k = \dfrac{7\pi}{4} \\ SCD: k \neq \dfrac{\pi}{4} \wedge k \neq \dfrac{3\pi}{4} \wedge k \neq \dfrac{5\pi}{4} \wedge k \neq \dfrac{7\pi}{4} \end{cases}$

28. $\begin{cases} senk.x + senk.y = senk \\ \cos k.x + senk.y = \cos k \end{cases}$

R: $\begin{cases} SCI : k = 0 \vee k = \pi \vee k = \dfrac{\pi}{4} \vee k = \dfrac{5\pi}{4}, \\ SI : \nexists k \\ SCD : k \neq 0 \wedge k \neq \pi \wedge k \neq \dfrac{\pi}{4} \wedge k \neq \dfrac{5\pi}{4} \end{cases}$

29. $\begin{cases} 3x \log\left(36 + 2^{\sqrt{2(m-1)}}\right) + 4y = 0 \\ 12x + 8y = 0 \end{cases}$

R: $\begin{cases} SCI : m = 19, \\ SI : Nunca \\ SCD : m \neq 19 \end{cases}$

30. $\begin{cases} 3x \log(m-2) - y = 0 \\ x \log \dfrac{m}{8} + \dfrac{1}{3} y = 0 \end{cases}$

R: $\begin{cases} SCI : m = 4, \\ SI : Nunca \\ SCD : m \neq 4 \end{cases}$

31. $\begin{cases} \left(\sqrt{f(x)}\right)^2 + 4y = 23, \qquad f(x) = x - 6 + |5x + 15| \\ k^2 x + 6y = 21 \end{cases}$

R: $\begin{cases} SCI : \nexists k, \\ SI : k = -3 \;\; (k = 3 \notin Df(x)) \\ SCD : k \neq 3 \wedge k \neq -3 \end{cases}$

32. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 2b \\ x + 5y + (3 + 2a)z = 1 + 2b \\ 2x + 4y + (2a + 10)z = 3b - 1 \end{cases}$

R: $\begin{cases} SCI : a = -2, b = -1, \\ SI : a = -2, b \neq -1 \\ SCD : a \neq -2 \end{cases}$

33. $\begin{cases} x+2y+(a-1)z=b \\ 5x-3y-z=c+2 \\ -4x+5y+(2a+2)z=a+2 \end{cases}$

R: $\begin{cases} SCI: a=-2, b-c=2, \\ SI: a=-2, b-c\neq 2 \\ SCD: a\neq -2 \end{cases}$

34. $\begin{cases} 5x+3y+kz=4 \\ -2x-y+2z=-1 \\ (k+8)x+6y+4z=8 \end{cases}$

R: $\begin{cases} SCI: k=2, \\ SI: k=-4 \\ SCD: k\neq 2 \wedge k\neq -4 \end{cases}$

35. $\begin{cases} -2x+4y+kz=8 \\ x-3y+z=-9 \\ (k+1)x-8y-6z=-15 \end{cases}$

R: $\begin{cases} SCI: \nexists k, \\ SI: k=3 \vee k=\dfrac{8}{3} \\ SCD: k\neq 3 \wedge k\neq \dfrac{8}{3} \end{cases}$

3 Problemas verbales (sistemas de ecuaciones)

Sistemas 1x1 y 2x2

36. La suma de las edades de dos hermanos está en relación 5 a 1 con la diferencia entre las mismas. ¿Cuál es la edad del mayor si el menor tiene 8 años?
R: 12 años

37. Si las edades del padre y de la madre están entre sí como 8 es a 7, ¿cuál es la edad de cada uno si se llevan 5 años? ¿Dentro de cuántos años sus edades estarán entre sí como 9 es a 8? ¿A qué edad se casaron si en ese momento sus edades estaban en relación 10 a 8?
R: a) 40 años y 35 años, b) 5 años, c) 25 años y 20 años.

38. Descomponer el número 500 en dos partes, de manera que al dividir la mayor por la menor se obtenga de cociente 7 y de resto 20.
R: Q = 60, P = 440.

39. Si el ancho de un rectángulo mide dos centímetros más que su longitud y su perímetro es de 40 cm ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?
R: Largo = 9 cm, ancho = 11 cm.

40. Una señora va al mercado y compra 5 Kg de café y 10 Kg de manzana. Gasta en total 250 $. Si hubiera comprado el doble de café y la mitad de manzana, habría gastado 425 $. ¿Cuánto dinero gastaría si quisiera comprar 4 Kg de café y 20 de manzana?
R: R: 260 $

41. Un padre quiere estimular a su hijo para que aprenda Matemáticas. Para eso, promete darle 3 $ por cada ejercicio bien resuelto, pero le avisa que por cada ejercicio mal resuelto le va a descontar 2 $. El hijo resuelve 26 ejercicios, y ha ganado 38 $. ¿Cuántos ejercicios hizo bien y cuantos mal?
R. Mal = 8, Bien= 18.

42. Desde un molino de aceite, se quiere enviarlo en camiones cisterna a un almacén. Los encargados del almacén piden que los camiones lleguen exactamente a las 5 de la tarde. Si los camiones viajan a 80 km/h, llegarían al almacén con una hora de adelanto, en tanto que si viajaran a 60 km/h, llegarían con una hora de retraso. ¿Cuál es la distancia entre el molino y el almacén?
R: 480 km.

43. Un comerciante compra dos relojes por 160 $ y los vende a 170 $. Calcula cuánto pagó por cada reloj si en la venta del primero ganó el 20 % y en la del segundo perdió un 5 %.
R: 72$ y 88$

44. Juan coloca 100.000 de ahorros en un plazo fijo. Coloca una parte de ese capital a un interés anual del 8 %, en tanto que el resto se coloca a un capital del 12% anual. La segunda parte produce anualmente 2000 $ más que la primera. Hallar cuánto dinero habrá obtenido al cabo de 5 años.
R. 161583$

45. Un joyero fabrica anillos de oro. Para eso trabaja con dos aleaciones de oro. La aleación A contiene un 80 % de oro, en tanto que la aleación B contiene un 55 % de oro. El joyero quiere fabricar 10 anillos de 20 g cada uno, que contengan un 70 % de oro. ¿Qué cantidad de material de cada aleación tendrá que usar?
R: A = 120g, B = 80g

Sistemas 3x3

46. **Lechería**
Una lechería vende leche entera, semidesnatada y desnatada a 1, 1.2 y 1.5 $/litro, respectivamente. Cierto día vendió 50 litros más de leche entera que de desnatada, y si hubiese vendido 5 litros más de leche desnatada, entonces el número de litros vendidos de leche desnatada sería cuatro veces el de leche semidesnatada vendida. Sabiendo que los ingresos totales obtenidos en dicho día fueron de $261.50. ¿Cuántos litros de cada tipo de leche vendió?
R: E: 125 lts, S: 20 lts, D: 75 lts.

47. **Alimento balanceado**
Se quieren obtener 10 Kg de un alimento balanceado para una granja formado por maíz, arroz y trigo; cuyos precios son 2, 4 y 2.5 $/Kg respectivamente. Hallar la cantidad de cada materia que ha de formar el alimento, sabiendo que el precio resultante ha de ser de 3 $/Kg y que la cantidad de arroz ha de ser el doble que la de trigo más 3 Kg.
R. M: 4.33, A: 4.78. T: 0.89

48. **Edificio**
Un edificio está dividido en 5 cuerpos, cada cuerpo tiene 11 pisos y cada piso 6 departamentos. Una persona vive en un cuerpo, piso y departamento tal que si al cuerpo le suman el piso y le restan cuatro veces el número de departamento, obtienen la cantidad de departamentos por piso. Además si al triple de la suma del cuerpo y el departamento le restan 1, tienen como resultado el piso. Por último, si suman el cuerpo, el piso y el departamento que habita, obtienen el número de pisos por cuerpo. ¿En qué cuerpo, piso y departamento vive esta persona.
R: Cuerpo 2, piso 8, departamento 1

49. **Número de cuatro dígitos**
Para ganar un juego, hay que adivinar un número de cuatro dígitos del cual se dan las siguientes pistas. Las pistas generales son: uno de los dígitos es el cero y se encuentra entre dos dígitos pares. Además el número tiene cuatro cifras distintas y es menor que 7000. Las pistas particulares son: los tres dígitos que falta descubrir son tales que la diferencia de dos de ellos es 6, la suma del doble de esos mismos dígitos aumentada en una unidad da como resultado el triple del dígito restante y la suma de los otros tres es 17- ¿Cuáles el número?
R: 2087

50. **Cuadrilátero**
Uno de los ángulos interiores de un cuadrilátero mide 40°. De los restantes, la suma de los no consecutivos excede en 200° al otro ángulo y éste es suplementario de uno de ellos. Encontrar la medida de todos los ángulos.
R: 40°, 140°, 60°, 120°.

51. **Ciclista**
Un ciclista recorre un camino que tiene una cuesta arriba, luego terreno llano y luego cuesta abajo. Lo hace tres veces como se indica en la siguiente tabla. ¿Cuál es la velocidad media cuesta arriba, en terreno llano y cuesta abajo?

km cuesta arriba	km terreno llano	km cuesta abajo	Tiempo total (h)
2	15	5	1.5
6	9	1	1.4
8	3	8	1.6

R: 7.7km/h, 14.3km/h, 20km/h.

52. **Edades hacia adelante y atrás**
Cierto día me dijo un amigo. a) Mi edad es el doble de la que tú tenías cuando yo tenía la edad que tú tienes. b) Además cuando tú tengas la edad que yo tengo, nuestras edades sumarán 63. ¿Se pueden hallar las edades con esos datos?
R: Sean x, y las edades de mi amigo y la mía; t el nº de años que hace que tenía yo su edad y s el nº de años que falta para que él tenga la mía. $s = 7$, $t = 7$, $y = 21$, $x = 28$.

53. **Edades de 3 en 3**
Queremos averiguar las edades de una familia formada por los padres y los dos hijos. Si sumamos sus edades de tres en tres obtenemos 100, 73, 74 y 98 años respectivamente. ¿Cuál es la edad de cada uno de ellos?
R. Padre 42, madre 41, hijos 17 y 15.

54. **Número de 3 cifras**
La suma de las tres cifras de un nº es 12, la diferencia entre este número y el que resulta al invertir el orden de sus cifras es 198 y la cifra de las decenas es la media aritmética de las otras dos cifras. Halla el número pedido.
R: 543

55. **Motos, triciclos y coches**
En un garaje hay 100 vehículos entre motos, triciclos y coches. Para combatir el insomnio, el vigilante ha decidido entretenerse contando las ruedas y pensando luego cuántos vehículos de cada clase podría haber. Si ha contado un total de 328 ruedas, a) Si hubiera 2 triciclos por cada 5 motos, ¿Cuántos vehículos habría de cada clase?, b) ¿Es posible que haya sólo un triciclo? ¿Por qué?, c) entre qué valores puede estar el nº de coches?
R: a) 58 coches, 12 triciclos y 30 motos, b) No, porque saldría decimal el nº de motos, c) entre 29 y 63.

56. **Lewis Carroll**
Lewis Carroll, autor de Alicia en el país de las maravillas, propone un problema que puede enunciarse así: el consumo en una cafetería de un vaso de limonada, tres sándwiches y siete bizcochos ha costado 1 chelín y 2 peniques, mientras que un vaso de limonada, cuatro sándwiches y diez bizcochos vale 1 chelín y 5 peniques. Hallar cuál es el precio:
a) De un vaso de limonada, un sándwich y un bizcocho.
b) De dos vasos de limonada, tres sándwiches y cinco bizcochos.
Resolver el problema recordando que 1 chelín vale 12 peniques.
R: a) 8 peniques, 19 peniques

57. **Regalos**
Compro 100 regalos de diferentes precios, 25$, 5$ y 0.25$ y me gasto en total 500$, ¿cuántos regalos he comprado de cada cantidad exactamente? (Tener en cuenta que las soluciones deben ser enteras y positivas).
R: 18$, 1$ y 80$

58. **Tornillos**
Compré 100 tornillos de distintas medidas por un total de 500 $. Los precios por unidad fueron: 50 $. los de medida A, 10 $. los de medida B y 1 $. los de medida C. ¿Cuántos tornillos compré de cada clase? (Tener en cuenta que las soluciones deben ser enteras y positivas).
R 1 de A, 39 de B y 60 de C.

59. **H2SO4**
En un laboratorio de química hay tres contenedores de ácido sulfúrico, H2SO4 cada uno con una concentración distinta del ácido. Cada contenedor tiene las siguientes concentraciones respectivamente: A. 15%, B: 25% y C: 50% de H2SO4. ¿Cuántos litros de cada solución se pueden mezclar para obtener 100 litros de la solución con una concentración de un 40% de H2SO4
R: Indeterminado. Por ejemplo: A: 10, B: 26, C: 64.

60. **Helados**
En cierta heladería por una copa de la casa, dos scones y cuatro batidos te cobran 34 $ un día. Otro día por 4 copas de la casa y 4 scones te cobran 44 $, y un tercer día te piden 26$ por un scon y 4 batidos. ¿Tienes motivos para pensar que alguno de los tres días te han presentado una cuenta incorrecta?
Sí, sistema incompatible.

A2 Transformaciones lineales

Sugerencias GeoGebra

- Para agilizar el dibujo en la vista Gráfica, colocar la cuadrícula y configurar "Fijado a cuadrícula"
- Colocar un deslizador para los parámetros de la transformación y así obtener un efecto contínuo de variación al accionar sobre el deslizador.
- Cambiar de color luego de cada transformación para visualizar mejor cada una de ellas.

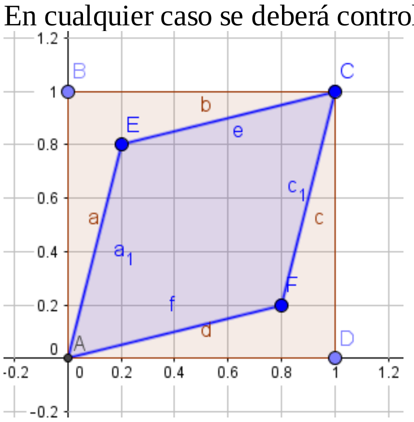
1 Transformaciones en general

61. Dada la siguiente matriz de transformación T, hallar y dibujar la transformación lineal de: a) el cuadrado elemental para observar el comportamiento general, b) el triángulo que une los vértices (-2, -2) (-2, 2) y (2, -2).

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

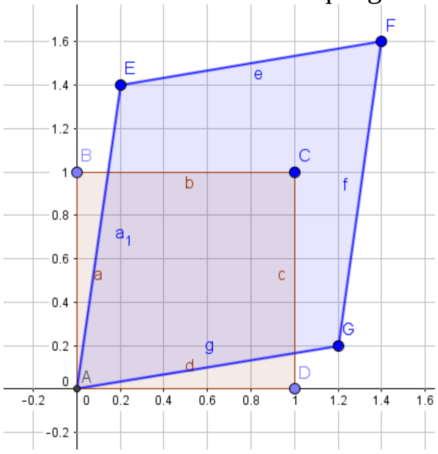
R: b) Triángulo (0, -4), (-4, -4) y (4, 4).

62. Diseñar la transformación T que genere la siguiente imagen del cuadrado elemental.
Las 4 incógnitas de la matriz de transformación podrán obtenerse de 2 formas alternativas:
a) el procedimiento general es tomar arbitrariamente 2 pares de puntos (objeto-imagen) de los datos y resolver el sistema.
b) en particular se pueden tomar los pares de puntos para cada versor (si se cuenta con los puntos imágenes de estos puntos). Esto coincide con la propiedad de las columnas de la matriz de transformación.
En cualquier caso se deberá controlar luego que los pares no utilizados verifiquen.



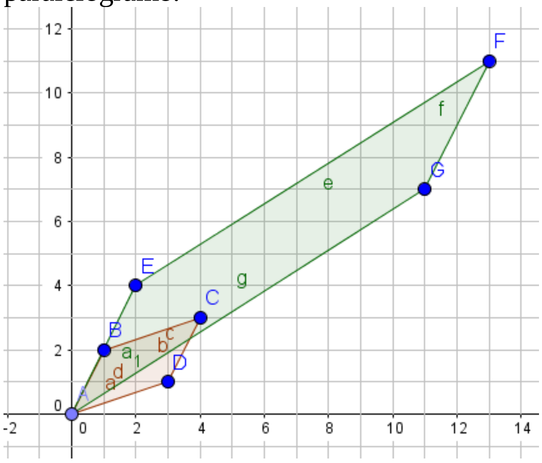
R: GeoGebra

63. Diseñar la transformación que genere la siguiente imagen del cuadrado elemental.



R: GeoGebra

64. Obtener la transformación que genere la siguiente imagen del paralelogramo ABCD.
En este caso no se puede aplicar el procedimiento particular de la propiedad de las columnas de la matriz y por lo tanto solo queda el procedimiento general: plantear la ecuación matricial para 2 pares de puntos objeto e imagen con las incógnitas de la matriz T y resolver los dos sistemas de ecuaciones de 2x2. Luego se deberá controlar que los pares no utilizados en la deducción, verifiquen.
Este problema conduce a otra propiedad de las TL: un paralelogramo se transforma en otro paralelogramo.



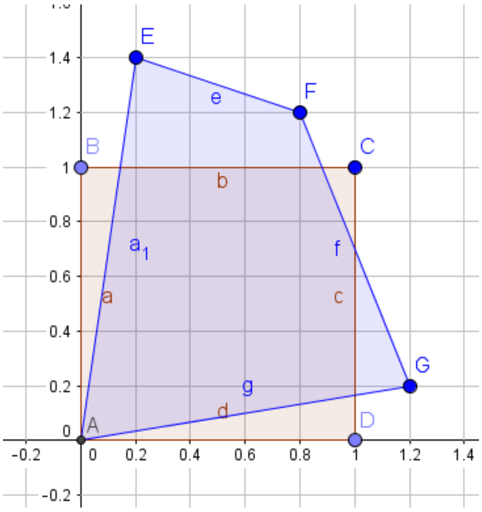
R: GeoGeobra.

65. Se puede demostrar que el área de una figura imagen J' de otra figura objeto de area J obtenido por una matriz de transformación T, está dada por:

$$J' = |T|\, J$$

Comprobar geométricamente esta relación calculando el área de los paralelogramos de las figuras de los problemas anteriores.
R: GeoGebra devuelve el área de una polígono en la Vista Algebraica, luego del nombre del polígono.

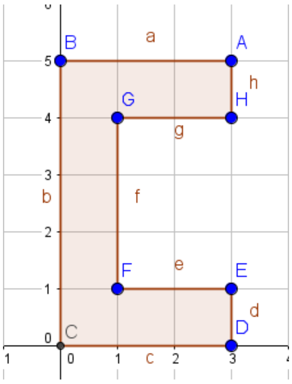
66. ¿Puede una TL transformar el cuadrado elemental en la siguiente imagen?. Las imágenes de cada vértice del cuadrado son: $A \to A, D \to G, C \to F, B \to E$.
Opcional: diseñar la transformación y justificar la respuesta.
Sugerencia: confrontar con el problema 62.



R: GeoGebra

2 Composiciones

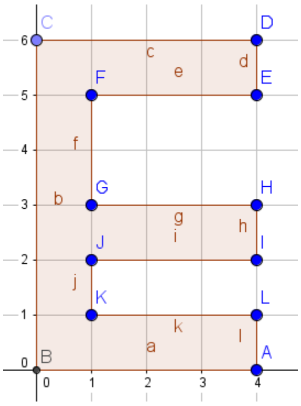
67. Obtener la composición de una reflexión en x y una reflexión en y. Obtener la matriz de la transformación en forma genérica y aplicarla a la siguiente figura. Comprobar con GeoGebra que el resultado es equivalente a una simetría central respecto del origen. ¿Esta composición es conmutativa? ¿Se podría haber obtenido la matriz en forma directa con la propiedad de sus columnas?



R: GeoGebra

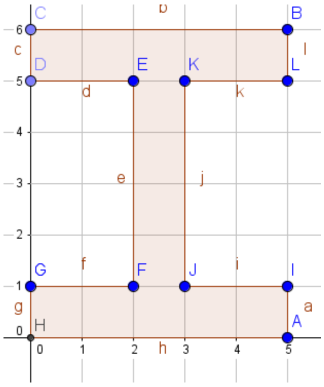
68. Componer una rotación respecto del origen un ángulo $-45°$ seguida de una reflexión respecto del eje x continuando finalmente con una rotación de 45°. Obtener la matriz de la transformación en forma genérica y aplicarla a la figura anterior. Comprobar con GeoGebra que el resultado es equivalente a una simetría respecto de una recta de 45° que pasa por el origen. ¿Se podría haber obtenido la matriz en forma directa con la propiedad de sus columnas?
Si se comienza en forma inversa con una rotación de 45°¿a qué transformación equivale ahora? ¿Por qué?
GeoGebra

69. Realizar una rotación de 90° respecto de O, seguida de otra de 180° respecto de O. b) Mostrar que esta matriz es la matriz que realiza una rotación de 270°. Obtener la matriz de la transformación en forma genérica y con ella hallar la imagen de la siguiente figura.



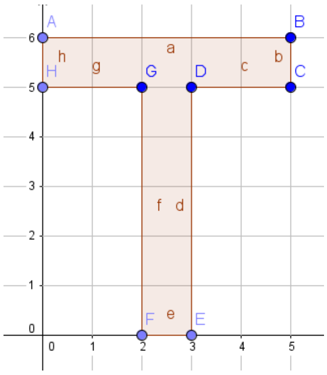
R: GeoGebra

70. Realizar una traslación de 3 unidades horizontalmente y 1 unidad verticalmente seguida de una rotación de 45° respecto de O (rototraslación). Obtener la matriz de la transformación en forma genérica y con ella hallar la imagen de la siguiente figura.
Luego repetir pero conmutando las transformaciones. ¿La rototraslación es conmutativa?



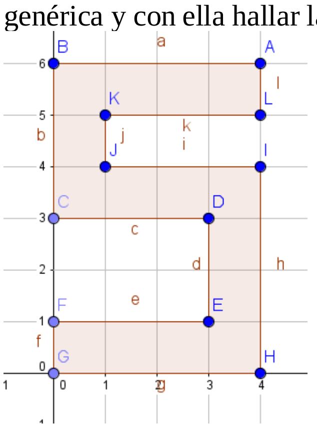
R: GeoGebra

71. Para la figura anterior realizar una reflexión respecto del eje y, seguida de una traslación de 3 unidades horizontalmente y 1 unidad verticalmente. Obtener la matriz de la transformación en forma genérica.
    Luego repetir pero conmutando las transformaciones. ¿Esta combinación es conmutativa?
    R: GeoGebra.
72. Para la figura anterior realizar una reflexión respecto del origen, seguida de una rotación respecto del origen con un ángulo de $-37°$. Obtener primero la matriz de la transformación en forma genérica.
    R: GeoGebra.
73. Realizar un escalado compuesto con a = 2 en la dirección x y b = 0.5 en la dirección y, seguido de una traslación de 2 unidades horizontalmente y 3 unidades verticalmente. Obtener la matriz de la transformación en forma genérica y con ella hallar la imagen de la siguiente figura.



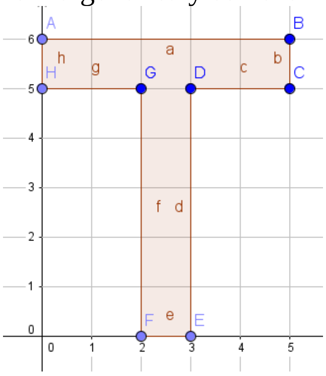
R: GeoGebra.

74. Realizar una homotecia respecto de O con k = 2, seguida de una rotación de 60° respecto de O, seguida de una reflexión sobre el origen. Obtener la matriz de la transformación en forma genérica y con ella hallar la imagen de la siguiente figura.



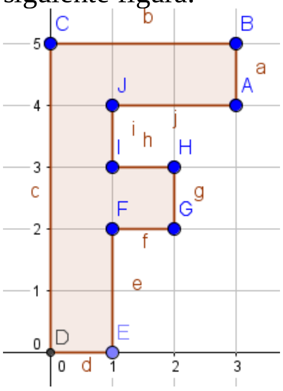
R: GeoGebra.

75. Realizar una rotación de -30° respecto de O, seguida de una homotecia respecto de O con k = -2, seguida de una reflexión respecto de la recta y = x. Obtener la matriz de la transformación en forma genérica y con ella hallar la imagen de la siguiente figura.



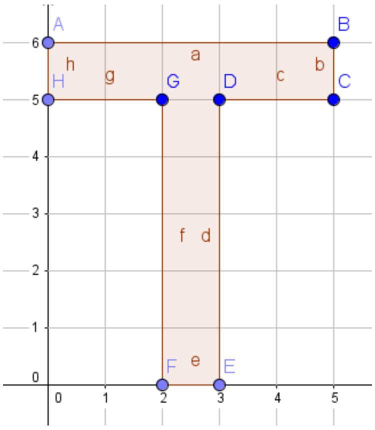
R: GeoGebra.

76. Realizar un cizallamiento en la dirección del eje x con a = 2, seguido de una traslación de 1 unidades horizontalmente y -1 unidad verticalmente, seguida de una rotación de 37° respecto de O. Obtener la matriz de la transformación en forma genérica y con ella hallar la imagen de la siguiente figura.



R: Geogebra

77. Realizar un deslizamiento compuesto con a = 2 en la dirección x y b = 0.5 en la dirección y, seguido de una traslación de 2 unidades horizontalmente y 3 unidades verticalmente. Obtener la matriz de la transformación en forma genérica y con ella hallar la imagen de la siguiente figura.



R: GeoGebra.

Fractales geométricos

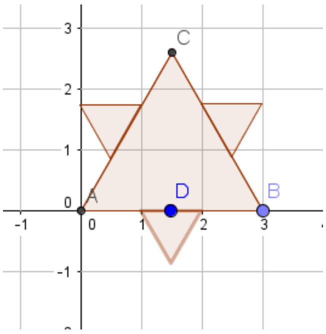
La unión de objetos geométricos **auto-similares** e **irregulares** no superpuestos se llama **fractal geométrico** (existen también fractales algebraicos y fractales naturales).
Transformación **auto-similar**: solo usa la **homotecia** con k <1 a veces compuesta con otras transformaciones isométricas (simetrías, traslaciones y/o rotaciones).

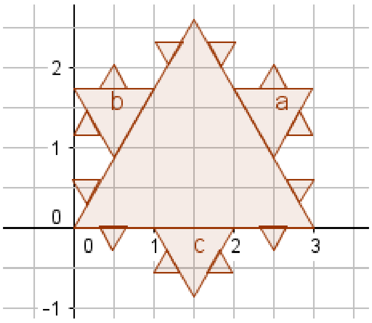
78. **Fractal de Koch**

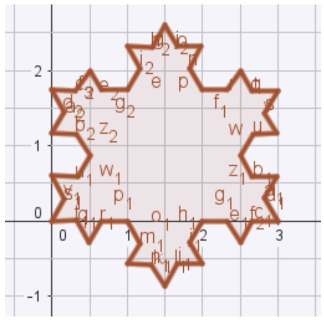
A partir del triángulo ABC de la figura de la izquierda generar los 3 triángulos auto-similares más chicos. Esta figura se llama modelo copo de nieve de Koch, iteración 1.
Opcional: **Iteración 2**: se repite recursivamente el proceso dibujando triángulos más pequeños en el tercio medio de cada lado externo de todos los triángulos del borde externo como muestra la figura del medio. El perímetro va tomando la forma de un copo de nieve como muestra la figura de la derecha.
Si $n \to \infty$ (n es el número de la iteración, L es la longitud original de un lado y A es el área):

.) el perímetro es $3(4/3)^n L$, sucesión geométrica de razón 4/3, que tiende a ∞

.) el área tiende a $(8/5)A$ (valor finito).







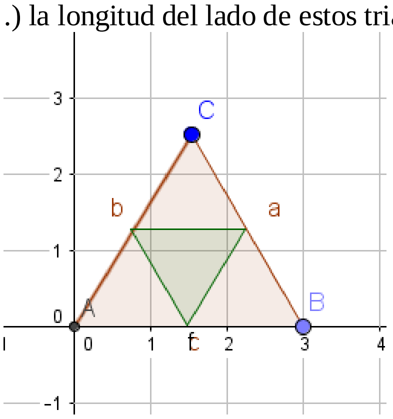
R: GeoGebra: La figura de la iteración 2 se creó generando una nueva herramienta para repetir todas las instrucciones en forma automática (Herramientas > Nueva). Elegir como objetos de Salida todos los polígonos y como Entrada los 3 puntos del triángulo en el mismo orden que se utilizó. Luego de creada la herramienta se seleccionan los nuevos 3 puntos de entrada de cada triángulo más chico en el mismo orden de los puntos de entrada y se aplica con Enter.

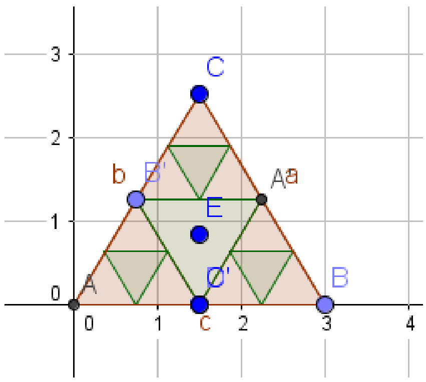
79. **Triángulo de Sierpinsky**

A partir del triángulo ABC de la figura de la izquierda diseñar las transformaciones necesarias para generar el triángulo interior verde auto-similar más chico (solo usar traslaciones, rotaciones y/o homotecias). Esta figura es la iteración 1 del triángulo de Sierpinsky.
Opcional: **Iteración 2**: si se repite recursivamente el proceso dibujando triángulos más pequeños en el centro de los tres triángulos externos al verde se obtiene la figura de la derecha. Va tomando la forma de una alfombra o carpeta.
Si $n \to \infty$ (n es el número de la iteración y L el lado del triángulo):

.) el número de triángulos marrones es: 3^n valor que tiende a ∞ .

.) la longitud del lado de estos triángulos es $L/2^n$ valor que tiende a 0.



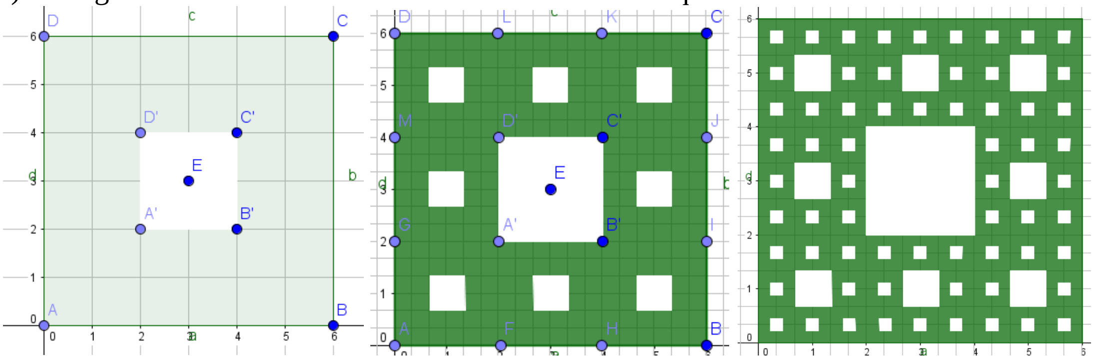


R: GeoGebra: Mismas sugerencias del problema anterior.

80. **Carpeta de Sierpinsky**
A partir del Cuadrado ABCD de la figura de la izquierda diseñar las transformaciones necesarias para generar el cuadrado interior blanco auto-similar más chico (solo usar traslaciones, rotaciones y/o homotecias).
Opcional: **Iteración 1**: si se repite recursivamente el proceso dibujando cuadrados más pequeños en el centro de los ocho cuadrados externos al blanco se obtiene la figura del medio.
Iteración 2: es la figura de la derecha. Va tomando la forma de una alfombra o carpeta.
Si $n \to \infty$ (n es el número de la iteración y L el lado del cuadrado):

.) el número de cuadrados blancos excepto el central es: 8^n valor que tiende a ∞ .

.) la longitud del lado de estos cuadrados es $L/9^n$ valor que tiende a 0.



R: GeoGebra: Mismas sugerencias del problema anterior.

Genética

ADN: Es la molécula que lleva codificada la información genética. Está compuesto por una cadena o sucesión en forma de hélice de 4 moléculas diferentes llamadas **nucleótidos** (Adenina A, Citosina C, Guamina G y Tiamina T). Cada uno de los 20 aminoácidos está formado por una secuencia definida de 3 de estos 4 nucleótidos. Por ejemplo uno de los tripletes de la Arginina es CGT.
Gen: Secuencia de ADN (millones de nucleótidos) que contiene la unidad de información de ciertas características, por ejemplo color de los ojos, la textura de la semilla o la longitud del tallo.
Alelo: Cada gen puede tener varias alternativas que se llaman alelos, por ejemplo color de ojos marrones, color de ojos verdes, color de ojos celestes. En una población puede haber más de 2 alelos para un gen y se llaman alelos múltiples, pero solo heredamos dos.
Un alelo dominante, es aquel que, como su mismo nombre indica, se manifiesta con prioridad ante uno de carácter recesivo. Los dominantes se suelen denotar con una letra mayúscula y los recesivos con una minúscula.
Ejemplo:
M: alelo color de ojos **marrón** dominante
a: alelo color de ojos **a**zul recesivo
Genotipo: Es el conjunto de genes que influyen en el interior del individuo, es decir que no son apreciables a simple vista. Se conoce a través de un análisis de ADN.
Fenotipo: Son los genes que se manifiestan en un individuo y que se pueden apreciar a simple vista.
Cromosoma: Conjunto de genes (alrededor de 2000 por cada cromosoma). Loa humanos tienen 23 pares de cromosomas, 23 provienen del padre y 23 de la madre. Del par 1 al 22 se llaman somáticos o **autosomas** y son comunes a ambos hombres y mujeres. El par 23 se llama cromosoma sexual **gonosoma** y difiere según qué género es una persona. Si es XX el sexo del individuo es cromosómicamente llamado hembra. Si es XY el sexo del individuo es cromosómicamente macho.
Genoma: conjunto de genes de una especie.

81. **Tabla de probabilidades (de un autosoma)**
La siguiente tabla muestra la tabla de probabilidades para un determinado gen en la concepción del genotipo de los hijos dados los genotipos de los padres.

Probabilidad	**Padres**					
Hijo	**AA-AA**	**AA-Aa**	**AA-aa**	**Aa-Aa**	**Aa-aa**	**aa-aa**
AA	1	0.5	0	0.25	0	0
Aa	0	0.5	1	0.5	0.5	0
aa	0	0	0	0.25	0.5	1

Demostrar la tabla de probabilidades a partir de un simple diagrama de árbol para cada una de las 6 columnas.

82. **Ecuación matricial (de un autosoma)**
Llamemos:
a_n : proporción de hijos con genotipo AA en la generación n
b_n : proporción de hijos con genotipo Aa en la generación n
c_n : proporción de hijos con genotipo aa en la generación n

$$\vec{x}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}, \vec{x}_{n-1} = \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{pmatrix},$$

M: la matriz de transición entre una generación y la siguiente.
Por lo tanto:
$\vec{x}_n = \mathbf{M}\vec{x}_{n-1}$

Demostrar que

$$\vec{x}_n = \mathbf{M}^n \vec{x}_0$$

83. **Matriz de transición (de un autosoma)**
Se tiene una gran proporción de plantas con los tres posibles genotipos AA, Aa y aa y se desea establecer el programa de nacimientos si se fertilizan siempre con plantas AA, es decir luego se toman a los hijos y también se fertilizan con AA.
a) ¿Cuáles columnas de la tabla de probabilidades componen la matriz de transición **M**?
b) Si por ejemplo los padres iniciales tienen 50% Aa y 50% aa, cual es la probabilidad de los genotipos de los hijos en la primera generación. ¿Tendrán hijos con genotipo aa?
c) Obtener el cuadrado de **M** y luego el cubo de **M**. ¿A partir de estos resultados, se puede inferir hacia donde tiende la $\mathbf{M}^n$ cuando el exponente tiende a infinito? Si no le resulta claro, obtener con GeoGebra la potencia de M para n =10 o mayor.
d) ¿Cuál es la interpretación relacionada con la descendencia de este ejemplo para un valor grande de n?
e) ¿Coinciden los resultados anteriores con las expresiones teóricas dadas por:

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 1-0.5^n & 1-0.5^{n-1} \\ 0 & 0.5^n & 0.5^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \vec{x}_n = \begin{pmatrix} 1-0.5^n b_0 - 0.5^{n-1} c_0 \\ 0.5^n b_0 + 0.5^{n-1} c_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

84. La experiencia es ahora fertilizar con genotipos de igual tipo. Repetir las preguntas a), b), c), d) y e) del problema anterior.
Las matrices teóricas son:

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0.5-0.5^{n+1} & 0 \\ 0 & 0.5^n & 0 \\ 0 & 0.5-0.5^{n+1} & 1 \end{pmatrix} \quad \vec{x}_n = \begin{pmatrix} a_0 + \left(0.5-0.5^{n+1}\right) b_0 \\ 0.5^n b_0 \\ c_0 + \left(0.5-0.5^{n+1}\right) b_0 \end{pmatrix}$$

85. Suponer ahora que siempre se fertilizan con el genotipo Aa. Repetir las preguntas a), b), c), d) y e) del problema anterior
86. Las matrices teóricas son:

$$\vec{x}_n = \begin{pmatrix} 0.25 + 0.5^{n+1}(a_0 - c_0) \\ 0.5 \\ 0.25 - 0.5^{n+1}(a_0 - c_0) \end{pmatrix}$$

87. Suponer ahora que primero se fertilizan con genotipo AA, luego con genotipo Aa, luego con AA y así siguiendo en forma alternativa. Repetir las preguntas a), b), c), d) y e) del problema anterior.
Las matrices teóricas son:

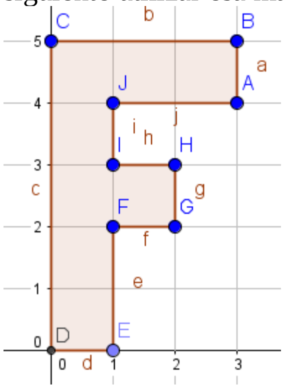
$$\vec{x}_{2n+1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}+\frac{1}{6(4)^n}(2a_0-b_0-4c_0)\\ \frac{1}{3}-\frac{1}{6(4)^n}(2a_0-b_0-4c_0)\\ 0\end{pmatrix}\quad n=0,1,2,...$$

$$\vec{x}_{2n}=\begin{pmatrix}\frac{5}{12}+\frac{1}{6(4)^n}(2a_0-b_0-4c_0)\\ 0.5\\ \frac{1}{12}-\frac{1}{6(4)^n}(2a_0-b_0-4c_0)\end{pmatrix}\quad n=1,2,...$$

3 Generalizaciones

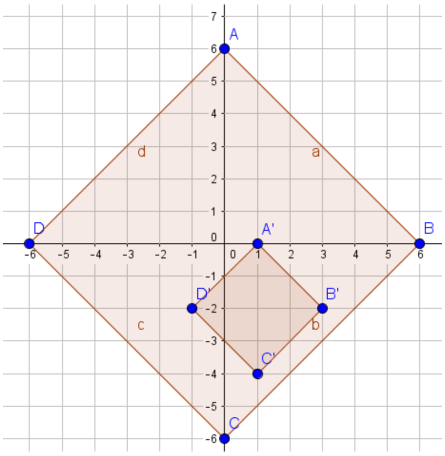
Los siguientes problemas extienden las transformaciones para cualquier punto o recta arbitrarios utilizando traslaciones y/o rotaciones.

88. Obtener la matriz de transformación de una rotación respecto de un punto arbitrario. En la figura siguiente utilizar esa matriz para realizar una rotación de 60° respecto del punto F.



R: Geogebra
89. Obtener la matriz de transformación de una reflexión respecto de un punto C. Utilizarla para hallar la imagen de la figura anterior con F como centro de reflexión.
R: GeoGebra.
90. Obtener la matriz de transformación de una reflexión respecto de la recta $y = mx$. Utilizarla para hallar la imagen de cualquier figura para $m = \tan\theta = \tan 50°$.
R: GeoGebra
91. Obtener la matriz de transformación de una reflexión respecto de la recta $y = mx + b$. Utilizarla para hallar la imagen de cualquier figura para $m = \tan\theta = \tan 30°$ y $b = 3$.
R: GeoGebra
92. Obtener la matriz de transformación de una homotecia k respecto de un punto cualquiera C. Utilizarla para hallar la imagen de la figura anterior con F como centro de homotecia y k= 0.5. Repetir para k = -0.5.
R: GeoGebra. Sugerencia; colocar un deslizador para k entre -2 y 2.
93. Dibujar una figura cualquiera y obtener la matriz de transformación de un estiramiento en la dirección x con factor 3 respecto de la recta y = 3.
R: GeoGebra
94. Obtener la matriz de transformación de un estiramiento respecto de la recta $y = mx$ con factor k. Utilizarla para hallar la imagen de cualquier figura para $y = 3x$ y $k = 2$
R: GeoGebra
95. Obtener la matriz de transformación de un estiramiento respecto de la recta $y = mx + b$ con factor k. Utilizarla para hallar la imagen de cualquier figura para $y = 3x + 2$ y $k = 2$
R: GeoGebra
96. Dibujar una figura cualquiera y obtener la matriz de transformación de un deslizamiento con factor 2 respecto de la recta y = 3
R: GeoGebra
97. Obtener la matriz de transformación de un deslizamiento respecto de la recta $y = mx$ con factor k. Utilizarla para hallar la imagen de cualquier figura para $y = 3x$ y $k = 2$
R: GeoGebra
98. Obtener la matriz de transformación de un deslizamiento respecto de la recta $y = mx + b$ con factor k. Utilizarla para hallar la imagen de cualquier figura para $y = 3x + 2$ y $k = -2$
R: GeoGebra

99. Diseñar la matriz de transformación que lleve el polígono externo al polígono interno con una composición de transformaciones. ¿Es una homotecia de k = 1/3 con respecto al punto $(1,-2)$? Si no lo es calcular el centro de homotecia C para obtener esta transformación.

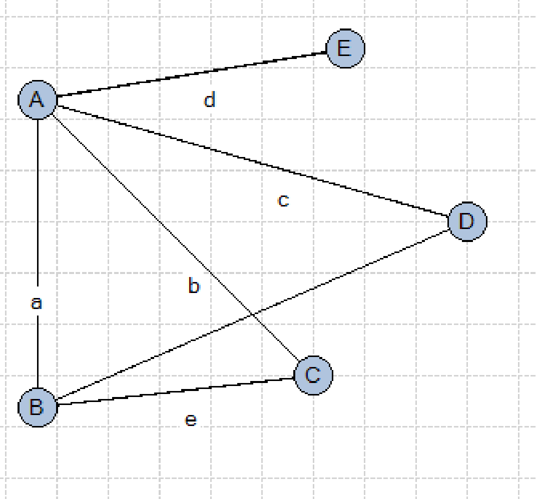


R: C(1.5, -3). GeoGebra. Sugerencia: Para la última pregunta construir una homotecia k = 1/3 con un centro en un punto P ubicado arbitrariamente y deslizar luego este punto.

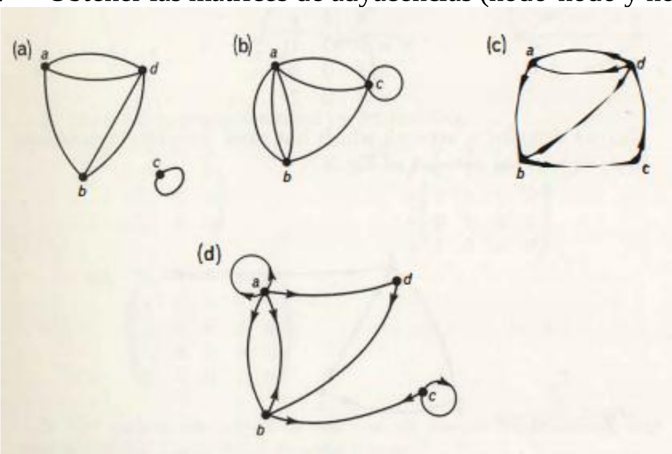
A3 Grafos

1 Matrices de frecuencias

100. Dado el siguiente grafo crear las matrices. A: nodo-nodo, B: nodo-arco y C: arco-arco. Multiplicar cada una por sí misma y por su traspuesta. ¿Qué representan?



101. Obtener las matrices de adyacencias (nodo-nodo y nodo-rama) o el grafo, según corresponda



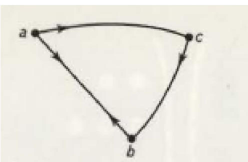
(a)
$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

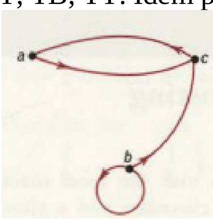
(b)
$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{pmatrix} \bullet & 2 & \bullet \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & \bullet & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

102. Obtener la matriz de adyacencias de un grafo completo con 5 nodos.

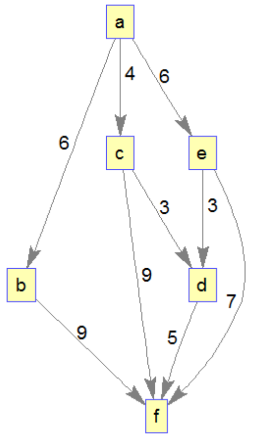
103. Los siguientes grafos describen los servicios de Bus B (en negro) y los posibles senderos para Trekking T (en rojo) en una villa. Obtener el número posible de viajes entre 2 nodos en los siguientes ordenes: BT, TB, TT. Ídem para 3 nodos en las secuencias TBT y BBB.





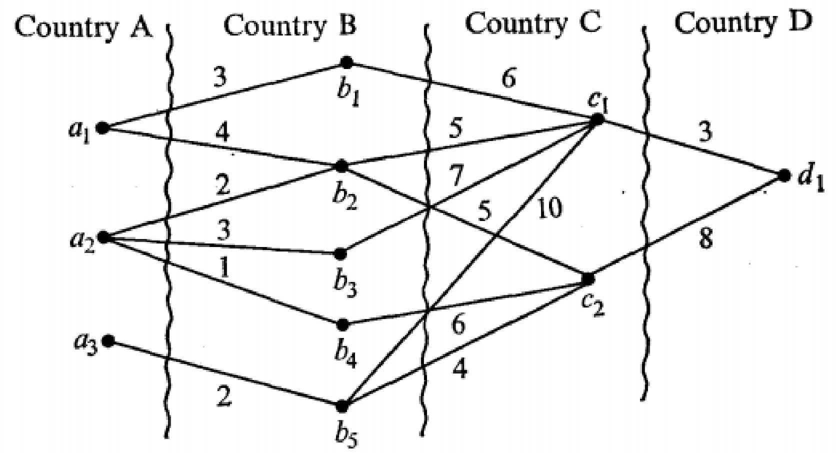
2 Matrices de pesos

104. El siguiente grafo contiene el tiempo en horas entre distintas ciudades. Hallar la ruta más corta entre las ciudades: ab, ac, ad, ae y af.



R: 6,4,7,6,12

105. Dada la siguiente configuración de ciudades;



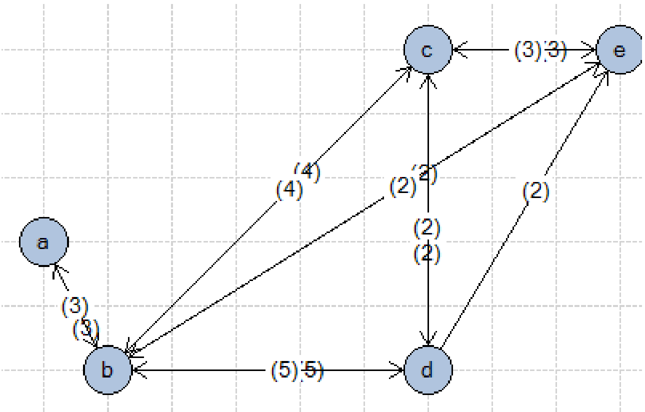
a) ¿Cuántos caminos hay entre las ciudades del país A hasta la ciudad del país D (es decir en el orden ABCD)? ¿Cuántas desde las ciudades del país B hasta la ciudad del país D

b) Si los pesos de las ramas representan las distancias entre las ciudades, ¿Cuál es el camino más corto entre las ciudades del país A hasta la ciudad del país D

c) Si los pesos de las ramas representan números de enlaces telefónicos, ¿cuál es el camino máximo desde las ciudades del país A hasta la ciudad del país D?

R: a) 3, 4 y 2, b) 12, 10 y 14, c) 17, 32 37.

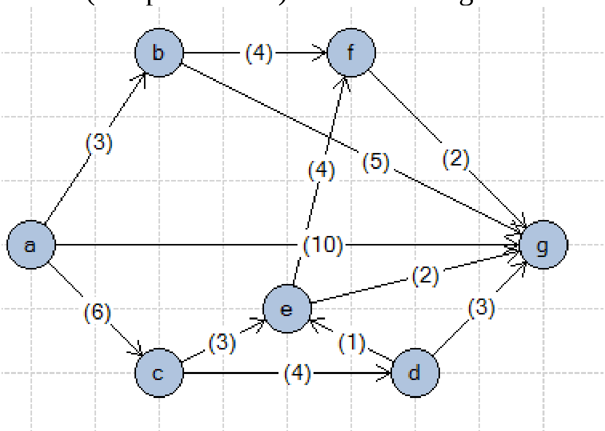
106. El siguiente grafo representa distancias ente nodos. Hallar la matriz de caminos mínimos(luego de estabilizarse).



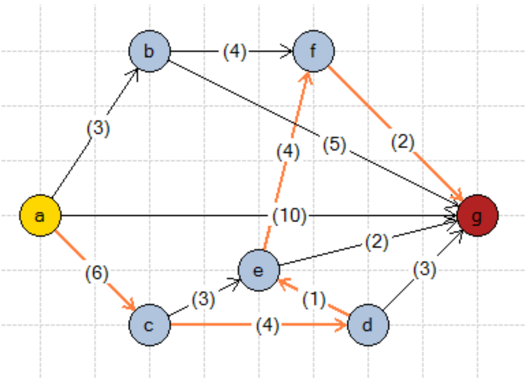
R:

N1\N2	a	b	c	d	e
a	0	3	7	8	9
b	3	0	4	5	6
c	7	4	0	2	3
d	8	5	2	0	2
e	9	6	3	2	0

107. El siguiente circuito contiene los tiempos de producción en una fábrica.Hallar el camino crítico (tiempo máximo) desde a hasta g.



R: 17



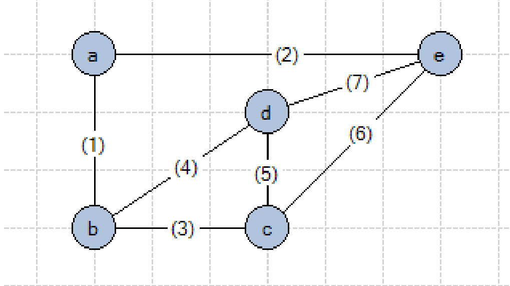
$I\ operación: 0 \quad 3 \quad 6 \quad 10 \quad 9 \quad 7 \quad 10$

$II\ operación: 0 \quad 6 \quad 6 \quad 10 \quad 11 \quad 13 \quad 13$

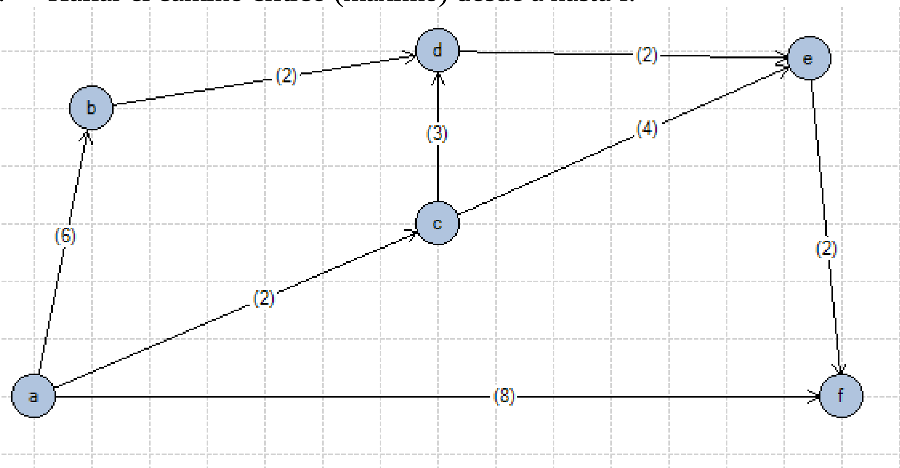
$III\ operación: 0 \quad 9 \quad 6 \quad 10 \quad 11 \quad 15 \quad 15$

$IV\ operación: 0 \quad 12 \quad 6 \quad 10 \quad 11 \quad 15 \quad 17$

El siguiente grafo solo contiene los nombres de nodos y ramas. Asignar nombres a las 4 regiones. Formar las siguientes matrices A: Nodo-Rama, B: Nodo Región, C: Rama- Región. Formar e interpretar las matrices: AA', A'A, BB', B'B, CC' y C'C (el apóstrofo indica traspuesta).

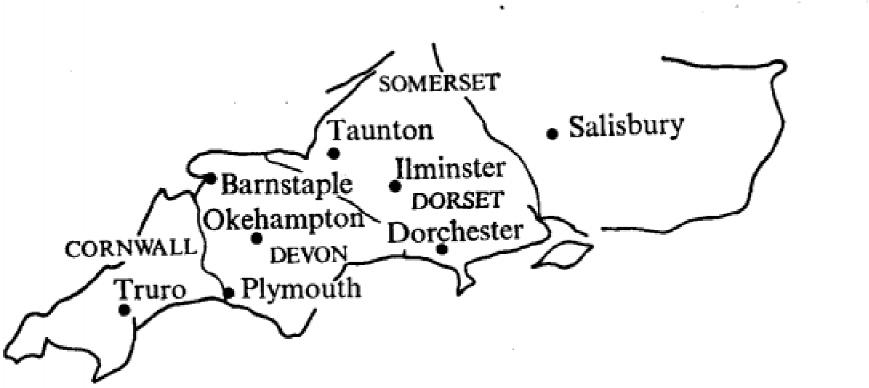


108. Hallar el camino crítico (máximo) desde a hasta f.



R: 12 abdef

109. Dado el siguiente mapa del sur de Inglaterra, hallara la distancia más corta desde Truro hasta Salisbury.



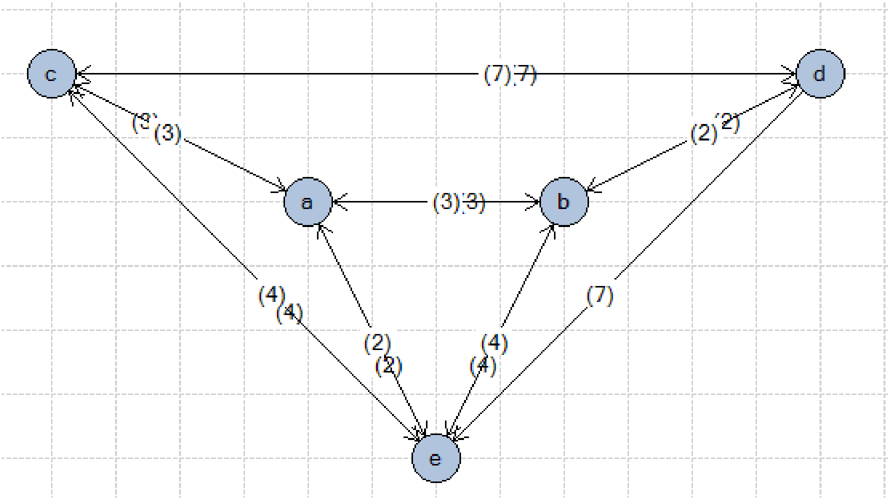
	Barn.	Ok.	Ply.
Truro	87	66	55

	Tau.	Ilm.	Dorch.
Barn.	50	66	86
Ok.	55	57	76
Ply.	74	76	94

	Sal.
Tau.	64
Ilm.	43
Dorch.	40

R: 166 millas pasando por Okehampton.

110. El grafo representa distancias entre negocios. El problema es decidir cuál de los lugares a o b debe ser elegido como tienda central. Para ello calcular las distancias mínimas entre a los nodos.



R: Desde a es 2 millas más corto que desde b.

Matriz de Distancias mínimas:

N1\N2	a	b	c	d	e
a	0	3	3	5	2
b	3	0	6	2	4
c	3	6	0	7	4
d	5	2	7	0	6
e	2	4	4	6	0